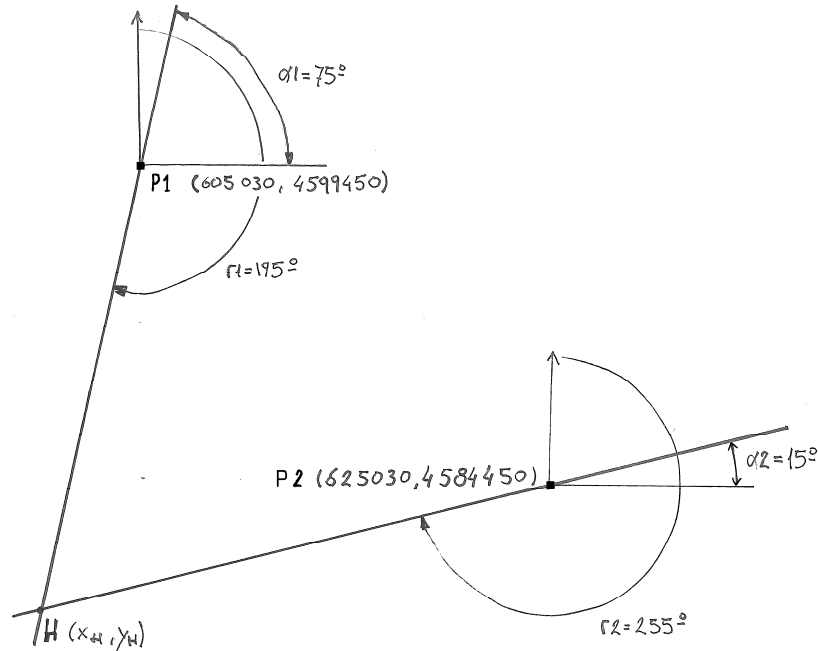


PROBLEMA 1 (5 PUNTOS)

A) RESOLUCIÓN MEDIANTE LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS-CON CAMBIO DE COORDENADAS

- 1) Calcular analíticamente las coordenadas UTM del punto dividido por los puestos fijos.

Figura 1



Con la finalidad de simplificar los cálculos realizamos un cambio de coordenadas estableciendo el origen en el puesto fijo 1, siendo las ecuaciones que rigen el cambio las siguientes:

$$X' = X - 605\,030$$

$$Y' = Y - 4\,599\,450$$

Mediante este cambio las nuevas coordenadas de los puestos fijos son las siguientes:

Coordenadas de puesto de vigilancia 1, (0,0)

$$X'_1 = 605\,030 - 605\,030 = 0$$

$$Y'_1 = 4\,599\,450 - 4\,599\,450 = 0$$

Coordenadas de puesto de vigilancia 2, (20 000, -15 000)

$$X'_2 = 625\,030 - 605\,030 = 20\,000$$

$$Y'_2 = 4\,584\,450 - 4\,599\,450 = -15\,000$$

Para calcular el punto de intersección de las dos visuales debemos obtener la expresión de las dos rectas que pasan por cada puesto fijo, cuya con pendiente puede deducirse a partir del rumbo medido con la aliada de pínulas, siendo α_1 el ángulo que forma la visual del puesto fijo 1 con el eje X y α_2 el ángulo que forma la visual del puesto fijo 2 con el eje X.

Se obtienen α_1 y α_2 :

$$\alpha_1 = 90^\circ - (r_1 - 180^\circ) = 90^\circ - (195^\circ - 180^\circ) = 75^\circ; \text{ siendo } m_1 = \tan \alpha_1 = \tan 75^\circ = 3,73205$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - (r_2 - 180^\circ) = 90^\circ - (255^\circ - 180^\circ) = 15^\circ; \text{ siendo } m_2 = \tan \alpha_2 = \tan 15^\circ = 0,26795$$

Quedando las ecuaciones de las rectas a partir de la expresión general del punto pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\text{Recta que pasa por el puesto 1; } y' - y'_1 = m_1(x' - x'_1)$$

$$\text{Recta que pasa por el puesto 2; } y' - y'_2 = m_2(x' - x'_2)$$

Sustituyendo por los valores conocidos ($m_1, m_2, x'_1, y'_1, x'_2, y'_2$) resulta un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$y' - 0 = 3,73205(x' - 0)$$

$$y' - (-15\ 000) = 0,26795(x' - 20\ 000)$$

Operando:

$$y' = 3,73205x'; \text{ ecuación de la recta que pasa por el puesto fijo 1}$$

$$y' - (-15\ 000) = 0,26795(x' - 20\ 000); y' + 15\ 000 = 0,26795x' - (0,26795 \cdot 20\ 000);$$

$$y' + 15\ 000 = 0,26795x' - 5359; y' = 0,26795x' - 5359 - 15\ 000; \text{ e}$$

$$y' = 0,26795x' - 20\ 359; \text{ ecuación de la recta que pasa por el puesto fijo 2}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda se obtiene x' :

$$3,73205x' = 0,26795x' - 20\ 359; \text{ despejando } x'.$$

$$(3,73205 - 0,26795)x' = -20\ 359; x' = -20\ 359 / (3,73205 - 0,26795) = -20\ 359 / 3,4641 = -5\ 877,14 \text{ m}$$

$$\text{Siendo } y' = 3,73205 \cdot 5877,14 = -21\ 933,78 \text{ m}$$

Obtenidas las coordenadas en el sistema de referencia auxiliar se calculan las coordenadas UTM aplicando la transformación establecida inicialmente.

$$x' = x - 605030; \quad -5\ 877,14 = x_H - 605\ 030;$$

$$y' = y - 4599450; \quad -21\ 933,78 = y_H - 4\ 599\ 450;$$

$$x_H = 605\ 030 - 5\ 877,14 = \mathbf{599\ 152,86 \text{ m}};$$

$$y_H = 4\,599\,450 - 21\,933,78 = \mathbf{4\,577\,516,22\,m};$$

2) Calcular analíticamente las coordenadas UTM del punto real de inicio del incendio.

Una vez conocidas las coordenadas del punto en el que divisa la base de la columna de humo, el punto de inicio se encontrará desplazado al oeste y al norte desde el punto divisado con igual distancia sobre el plano horizontal, el ángulo que forma la dirección del viento con el eje de las X es de 45° y por tanto el valor del $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,70711$.

Por tanto el valor en módulo del desplazamiento en ambos ejes del punto de inicio respecto del punto avistado es:

$$5\,000 \cdot \cos 45^\circ = 5\,000 \cdot 0,70711 = 3\,535,55\,m$$

Para obtener el valor de la coordenada UTM del inicio del incendio hay que restar esta longitud a la coordenada X del punto avistado, y sumarla a la coordenada Y del punto avistado, obteniéndose:

$$X_{\text{INCENDIO}} = 599\,152,86 - 3\,535,55 = \mathbf{595\,617,31\,m}$$

$$Y_{\text{INCENDIO}} = 4\,577\,516,22 + 3\,535,55 = \mathbf{4\,581\,051,77\,m}$$

B) RESOLUCIÓN MEDIANTE LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS-SIN CAMBIO DE COORDENADAS

1) Calcular analíticamente las coordenadas UTM del punto divisado por los puestos fijos.

Resolvemos el problema sin realizar el cambio de coordenadas del apartado anterior. En este caso las ecuaciones de las rectas tendrán las mismas pendientes calculadas arriba y los puntos se toman con las coordenadas dadas en el enunciado del problema.

De esta forma las ecuaciones de las rectas quedan de la siguiente forma:

$$\text{Recta que pasa por el puesto 1; } y - y_1 = m_1(x - x_1); \quad y - 4\,599\,450 = 3,73205(x - 605\,030);$$

$$\text{Recta que pasa por el puesto 2; } y - y_2 = m_2(x - x_2); \quad y - 4\,584\,450 = 0,26795(x - 625\,030);$$

Operando en el término de la derecha de las ecuaciones obtenemos:

$$y - 4\,599\,450 = 3,73205x - 2\,258\,002,212;$$

$$y - 4\,584\,450 = 0,26795x - 167\,476,789;$$

Restando la segunda ecuación a la primera obtenemos:

$$-4\,599\,450 - (-4\,584\,450) = (3,73205x - 0,26795x) - 2\,258\,002,212 - (-167\,476,789)$$

Operando llegamos a:

$$-15\,000 = 3,46410x - 2\,090\,525,423;$$

$$3,46410x = 2\,090\,525,423 - 15\,000$$

$$X_H = (2\,090\,525,423 - 15\,000) / 3,46410 = \mathbf{599\,152,86\,m}$$

Para obtener la coordenada Y, sustituimos el valor obtenido de X en la ecuación de la recta que pasa por el punto 1 (igualmente se puede hacer con la recta que pasa por el punto 2), obteniendo:

$$y - 4\,599\,450 = 3,73205(x - 605\,030);$$

$$y - 4\,599\,450 = 3,73205(599\,152,86 - 605\,030);$$

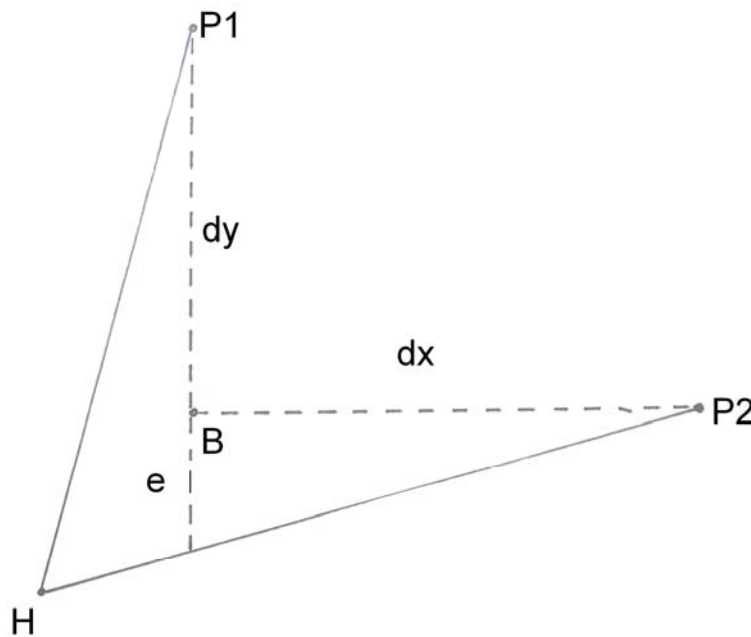
$$y_H = 3,73205(599\,152,86 - 605\,030) + 4\,599\,450 = \mathbf{4\,577\,516,22\,m}$$

El segundo apartado se resuelve como en el primer método.

C) RESOLUCIÓN MEDIANTE TRIGONOMETRÍA (RESOLUCIÓN DE DOS TRIÁNGULOS)

A partir de los datos del problema se replantean dos triángulos (uno de ellos rectángulo) formados por los segmentos de las visuales que unen los puntos fijos con la base de la columna de humo, por el eje de las coordenadas Y que pasa por el puesto fijo 1 y por el segmento horizontal que une el puesto fijo 2 con el eje de las Y que pasa por el puesto fijo 1. Estos dos triángulos se representan en la figura 2.

Figura 2



Siendo P1 la ubicación del puesto fijo 1, P2 la ubicación del puesto fijo 2, H el punto de la base de la columna de humo, B el punto de intersección entre el eje Y que pasa por el puesto fijo 1 y el eje de la X que pasa por el puesto fijo 2, dy la distancia en el eje Y entre puestos fijos y cateto del triángulo rectángulo, dx distancia en el eje X entre puestos fijos y cateto del triángulo rectángulo.

La resolución del problema pasa por calcular el valor del cateto e para obtener la longitud de lado vertical del triángulo situado a la izquierda, una vez conocido este valor se calcula el lado del triángulo que une el puesto fijo 1 al punto H. Una vez conocida esta distancia se obtienen las componentes en el eje X e Y que restadas a las coordenadas del punto fijo 1 permite obtener las coordenadas del punto H.

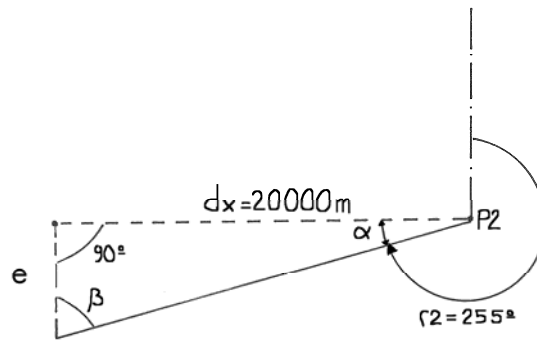
a) Calculamos dx y dy :

$$dx = 625\,030 - 605\,030 = 20\,000 \text{ m}$$

$$dy = 4\,599\,450 - 4\,584\,450 = 15\,000 \text{ m}$$

b) Cálculo del segmento e :

Figura 3



De la figura 3 se puede deducir el valor de los ángulos del triángulo:

$$\alpha = 270^\circ - 255^\circ = 15^\circ$$

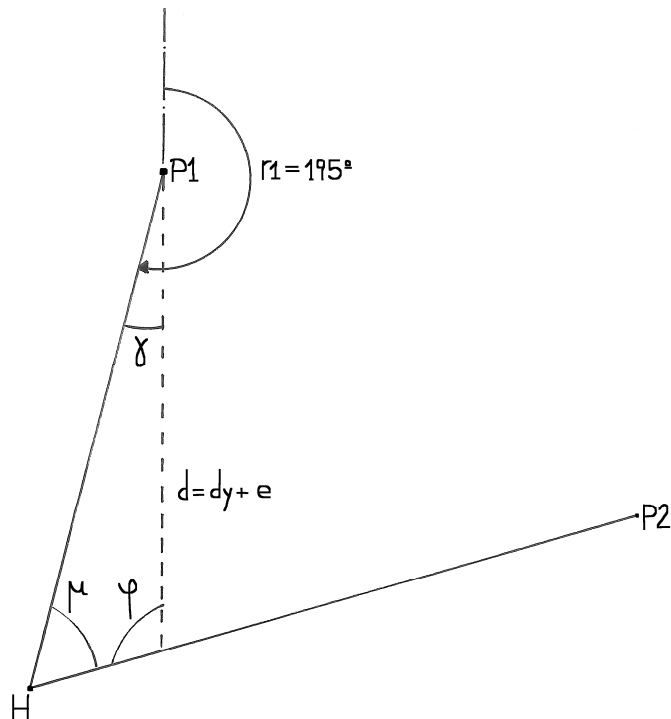
$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ (esta ángulo no es necesario para el cálculo del segmento e pero se obtiene para ser utilizado más adelante)

A partir de que $\tan 15^\circ = e/dx$ se despeja e:

$$e = dx \cdot \tan 15^\circ = 20\,000 \cdot 0,26795 = 5\,358,98385 \text{ m}$$

c) Cálculo de la distancia del punto fijo 1 al punto H resolviendo el otro triángulo:

Figura 4



De la figura 4 se puede deducir el valor de los ángulos del triángulo:

$$\gamma = 195^\circ - 180^\circ = 15^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\mu = 180^\circ - \gamma - \varphi = 180^\circ - 15^\circ - 105^\circ = 60^\circ$$

Siendo:

$$d = dy + e = 15\,000 + 5\,358,98385 = 20\,358,98385 \text{ m}$$

Para calcular el segmento P1H aplicamos el teorema del seno:

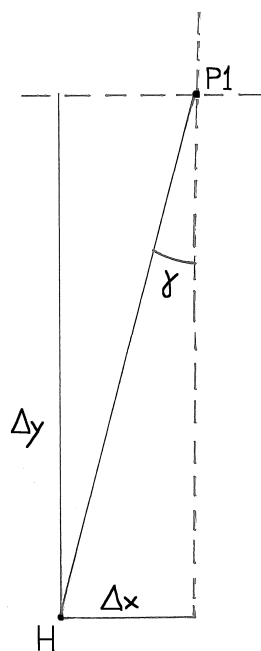
$$dy + e / \sin \mu = P1H / \sin \varphi; \text{ luego } P1H = (\sin \varphi / \sin \mu) \cdot (dy + e), \text{ sustituyendo por sus valores.}$$

$$P1H = (\sin 105^\circ / \sin 60^\circ) \cdot (20\,358,98385) = 22\,707,61202 \text{ m}$$

d) Obtención de las coordenadas de la base de la columna de humo.

Calcularemos primero las componentes en el eje X e Y del segmento que une el puesto fijo 1 con el punto H (Figura 5), para después restarles su valor a las coordenadas del puesto fijo 1.

Figura 5



$$\Delta x = \sin \gamma \cdot P1H = \sin 15^\circ \cdot 22\,707,61202 = 5\,877,18414$$

$$\Delta y = \cos \gamma \cdot P1H = \cos 15^\circ \cdot 22\,707,61202 = 21\,933,96368$$

Por lo tanto las coordenadas del punto H serán:

$$X_H = x_{\text{puesto fijo1}} - \Delta x = 605\,030 - 5\,877,18414 = \mathbf{599\,152,82 \text{ m}}$$

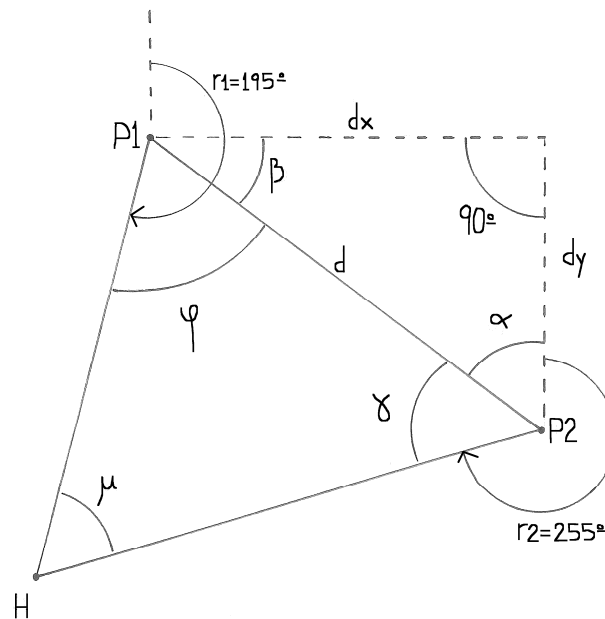
$$Y_H = Y_{\text{puesto fijo1}} - \Delta y = 4\,599\,450 - 21\,933,96368 = \mathbf{4\,577\,516,03\,m}$$

El cálculo de las coordenadas del punto de inicio del incendio se resuelve como se expone en el primer método.

D) RESOLUCIÓN MEDIANTE TRIGONOMETRÍA (RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO)

La distancia entre el puesto fijo y el punto H puede obtenerse también mediante la resolución del triángulo de la figura 6:

Figura 6



Siendo:

$$dx = 625\,030 - 605\,030 = 20\,000\,m$$

$$dy = 4\,599\,450 - 4\,584\,450 = 15\,000\,m$$

$$d = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = (20\,000^2 + 15\,000^2)^{1/2} = 25\,000\,m$$

$$\alpha = \arctan(dx/dy) = \arctan(20\,000/15\,000) = \arctan(1,33333) = 53,13003^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 53,13003^\circ = 36,86997^\circ$$

$$\gamma = 360^\circ - 255^\circ - \alpha = 360^\circ - 255^\circ - 53,13003^\circ = 51,86997^\circ$$

$$\varphi = 195^\circ - 90^\circ - \beta = 195^\circ - 90^\circ - 36,86997^\circ = 68,13003^\circ$$

$$\mu = 180^\circ - \varphi - \gamma = 180^\circ - 68,13003^\circ - 51,86997^\circ = 60^\circ$$

Aplicando el teorema del seno con D, P1H, μ y γ , resulta:

$d/\text{sen } \mu = P1H/\text{sen } \gamma$; despejando P1H:

$$P1H = (d \cdot \text{sen } \gamma) / (\text{sen } \mu) = (25\,000 \cdot \text{sen} 51,86997^\circ) / (\text{sen } 60^\circ) = 22\,707,35 \text{ m.}$$

Una vez calculada la distancia entre el punto fijo 1 y el punto H se procede de forma análoga a lo expuesto en el apartado anterior.

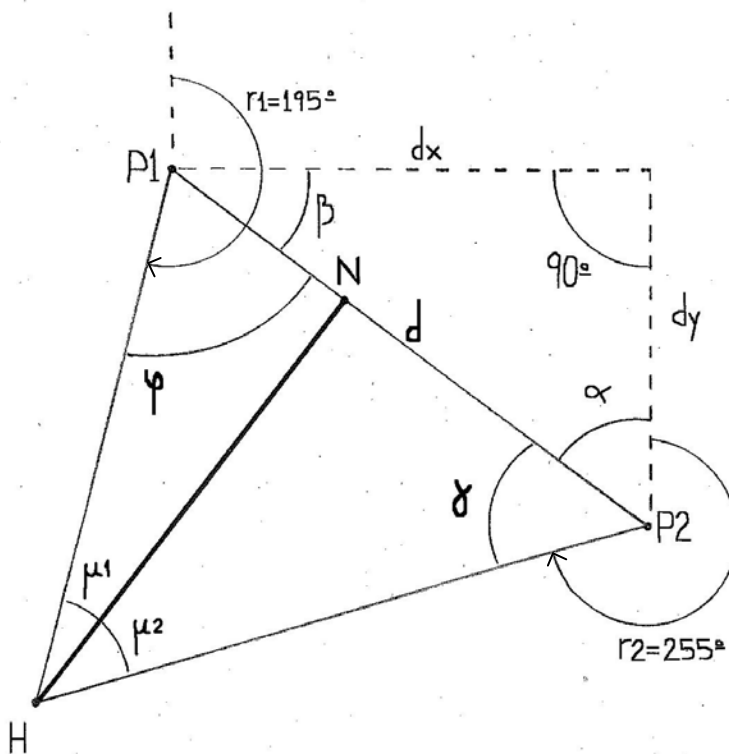
Igualmente puede resolverse el apartado calculado la longitud del segmento P2H que une el puesto fijo 2 con el punto H.

La resolución del segundo apartado del ejercicio se resuelve como se ha indicado en el primer método.

E) RESOLUCIÓN MEDIANTE TRIGONOMETRÍA (UTILIZANDO LA ALTURA DEL TRIÁNGULO)

También puede resolverse el primer apartado a través del cálculo de la longitud del segmento P1H, utilizando la altura del triángulo formado por P1, P2 y H. En la figura 7 se representa la altura con los valores de los ángulos de los dos triángulos rectángulo que se generan.

Figura 7



Conocidos los ángulos ϕ y γ obtenidos en el método anterior. El valor de los ángulos μ_1 y μ_2 son los siguientes:

$$\mu_1 = 180^\circ - \phi - 90^\circ = 180^\circ - 68,13003^\circ - 90^\circ = 21,86997^\circ$$

$$\mu_2 = 180^\circ - \gamma - 90^\circ = 180^\circ - 51,86997^\circ - 90^\circ = 38,13003^\circ$$

Si conocemos las longitudes de los segmentos P1N y de la altura HN mediante el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del segmento P1H para después obtener las coordenada de la base del humo de la misma forma que en el método anterior.

Partimos de las siguientes relaciones:

$$d = P1N + P2N = 25\,000\text{ m}$$

$$\tan 21,86997^\circ = 0,40139 = P1N/HN$$

$$\tan 38,13003^\circ = 0,78495 = P2N/HN$$

Dividiendo la segunda ecuación por la tercera nos quedamos con dos ecuaciones, siendo estas:

$$P1N + P2N = 25\,000\text{ m}$$

$$0,40139/0,78495 = P1N/P2N$$

Despejamos de la segunda ecuación P2N y lo sustituimos en la primera, resultando:

$$P2N = P1N \cdot (0,78495/0,40139) = 1,95558 \cdot P1N, \text{ sustituyendo en la primera ecuación}$$

$$P1N + 1,95558 \cdot P1N = 25\,000;$$

$$2,95558 \cdot P1N = 25\,000; \text{ siendo } P1N = 25\,000/2,95558 = 8\,458,57667\text{ m}$$

Obtenemos el valor del segmento HN sustituyendo la longitud de P1N en la siguiente expresión:

$$\tan 21,86997^\circ = 0,40139 = P1N/HN; 0,40139 = 8\,458,57667/HN;$$

$$HN = 8\,458,57667/0,40139 = 21\,073,21226\text{ m}$$

Mediante el teorema de Pitágoras calculamos el segmento P1H

$$P1H = (P1N^2 + HN^2)^{1/2} = (8\,458,57667^2 + 21\,073,21226^2)^{1/2} = (515\,627\,794,2)^{1/2} = 22\,707,44\text{ m}$$

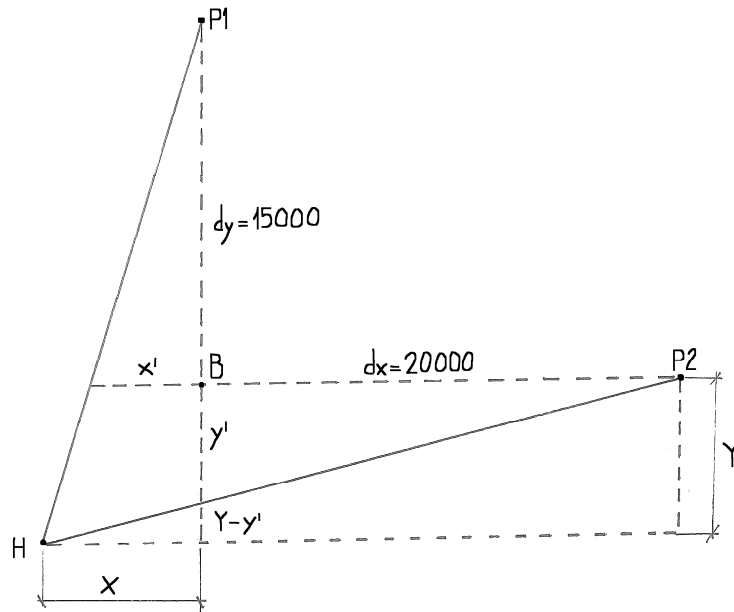
Una vez calculada la distancia entre el punto fijo 1 y el punto H se procede de forma análoga a lo expuesto en el apartado C)

La resolución del segundo apartado del ejercicio se resuelve como se ha indicado en el primer método.

F) RESOLUCIÓN MEDIANTE SEMEJANZAS DE TRIÁNGULOS

Se plantean los triángulos que aparecen en la figura 8

Figura 8



Aplicando la semejanza de triángulos se establecen las siguientes relaciones:

$$X/(15\,000+Y) = x'/15\,000$$

$$Y/(20\,000+X) = (Y-y')/X$$

Siendo $x'/15\,000 = \tan 15^\circ = 0,26794$, pues antes se ha visto que el ángulo menor que forma el segmento P1H con la vertical es de 15°

$$Y \text{ siendo } y' = \tan 15^\circ \cdot 20\,000 = 5\,358,98385 \text{ m}$$

Quedan las siguientes ecuaciones a resolver:

$$X/(15\,000+Y) = 0,26795$$

$$Y/(20\,000+X) = (Y-5\,358,98385)/X$$

$$\text{Despejando } x \text{ de la primera ecuación } X = 0,26795(15\,000+Y) = 4\,019,25+Y \cdot 0,26795$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación, para despejar Y:

$$Y/(20\,000+4\,019,25+Y \cdot 0,26795) = (Y-5\,358,98385)/(4\,019,25+Y \cdot 0,26795);$$

$$Y(4\,019,25+Y \cdot 0,26795) = (Y-5\,358,98385)(4\,019,25+Y \cdot 0,26795)$$

$$0,26795Y^2 + 4\,019,25Y = 0,26795Y^2 + 24\,019,25Y - 1\,435,93972Y - 128\,718\,772,8$$

$$-18\,566,5241Y = -128\,718\,772,2$$

$$Y = -128\,718\,772,2 / -18\,566,5241 = 6933,76 \text{ m}$$

Una vez conocida Y sabemos que la distancia en vertical que separa el puesto fijo 1 de la base de la columna de humo es:

$$15\,000 + 6933,76 = 21\,933,76 \text{ m}$$

Para obtener la distancia entre estos punto en el eje horizontal basta con despejar:

$$\tan 15^\circ = X / 21\,933,76; X = 21\,933,76 \cdot \tan 15^\circ = 5\,877,15 \text{ m}$$

Obtenidas las distancias X e Y de la figura 6, las coordenadas del punto H se obtienen restando su valor de las coordenadas del puesto fijo 1:

$$X_H = 605\,030 - 5\,877,15 = \mathbf{599\,152,85 \text{ m}}; \text{ redondeando al metro } X_H = \mathbf{599\,153 \text{ m}}$$

$$Y_H = 4\,599\,450 - 21\,933,76 = \mathbf{4\,577\,516,24 \text{ m}}; \text{ redondeando al metro } Y_H = \mathbf{4\,577\,516 \text{ m}}$$

La resolución del segundo apartado del ejercicio se resuelve como se ha indicado en el primer método.

NOTA: la resolución del ejercicio mediante otras relaciones de semejanza con otros triángulos se ha considerado correcta. Como por ejemplo:

$$\tan 15^\circ = X / (15\,000 + Y)$$

$$\tan 15^\circ = Y / (20\,000 + X)$$

$$y^I = P2B. \tan 15^\circ = 20\,000 \cdot 0,26795 = 5\,359,0 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x'' e y'' .

$$\tan 15^\circ = x''/y'; \quad x'' = y' \cdot \tan 15^\circ = 5\,359,002\,6795 = 1\,435,94405 \text{ m}$$

$$\tan 15^\circ = y''/x'; \quad y'' = x' \cdot \tan 15^\circ = 4\,019,250\,26795 = 1\,076,95804 \text{ m}$$

De nuevo se repiten los cálculos para obtener x''' e y'''

$$x''' = y'' \cdot \tan 15^\circ = 1\,076,95804 \cdot 0,26795 = 288,57091 \text{ m}$$

$$y''' = x'' \cdot \tan 15^\circ = 1\,435,94405 \cdot 0,26795 = 384,76121 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^{IV} e y^{IV}

$$x^{IV} = y''' \cdot \tan 15^\circ = 384,76121 \cdot 0,26795 = 103,09677 \text{ m}$$

$$y^{IV} = x''' \cdot \tan 15^\circ = 288,57091 \cdot 0,26795 = 77,32258 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^V e y^V

$$x^V = y^{IV} \cdot \tan 15^\circ = 77,32258 \cdot 0,26795 = 20,71859 \text{ m}$$

$$y^V = x^{IV} \cdot \tan 15^\circ = 103,09677 \cdot 0,26795 = 27,62478 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^{VI} e y^{VI}

$$x^{VI} = y^V \cdot \tan 15^\circ = 27,62478 \cdot 0,26795 = 7,40206 \text{ m}$$

$$y^{VI} = x^V \cdot \tan 15^\circ = 20,71859 \cdot 0,26795 = 5,55155 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^{VII} e y^{VII}

$$x^{VII} = y^{VI} \cdot \tan 15^\circ = 5,55155 \cdot 0,26795 = 1,48754 \text{ m}$$

$$y^{VII} = x^{VI} \cdot \tan 15^\circ = 7,40206 \cdot 0,26795 = 1,98338 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^{VIII} e y^{VIII}

$$x^{VIII} = y^{VII} \cdot \tan 15^\circ = 1,98338 \cdot 0,26795 = 0,53145 \text{ m}$$

$$y^{VIII} = x^{VII} \cdot \tan 15^\circ = 1,48754 \cdot 0,26795 = 0,39859 \text{ m}$$

Se repiten los cálculos para obtener x^{IX} e y^{IX}

$$x^{IX} = y^{VIII} \cdot \tan 15^\circ = 0,39859 \cdot 0,26795 = 0,1068 \text{ m}$$

$$y^{IX} = x^{VIII} \cdot \tan 15^\circ = 0,53145 \cdot 0,26795 = 0,1424 \text{ m}$$

Alcanzada una precisión suficiente, las coordenadas del punto de la base de la columna será:

$$\begin{aligned} X_H &= 605\,030 - (4\,019,25 + 1\,435,94405 + 288,57091 + 103,09677 + 20,71859 + 7,40206 + 1,48754 \\ &\quad + 0,53154 + 0,1068) = 625\,030 - 5\,877,10817 = \mathbf{599\,152,89 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$Y_H = 4\,584\,450 - (5\,359,0 + 1\,076,95804 + 384,76121 + 77,32258 + 27,62478 + 5,55155 + 1,98338 + 0,39859 + 0,1424) = 4\,584\,450 - 6\,933,74253 = \mathbf{4\,577\,516,26\,m}$$

Para la resolución del segundo apartado se sigue lo expuesto en el primer método.